

6. Оптимальные линейные цепи (фильтры)

6.1. Понятие оптимального фильтра, его характеристики

Пусть на вход линейной цепи (рис.6.1) воздействует аддитивная смесь сигнала $s(t)$ и стационарного гауссова шума $n(t)$ с спектральной плотностью мощности $N(\omega)$

$$\xi(t) = s(t) + n(t). \quad (6.1)$$

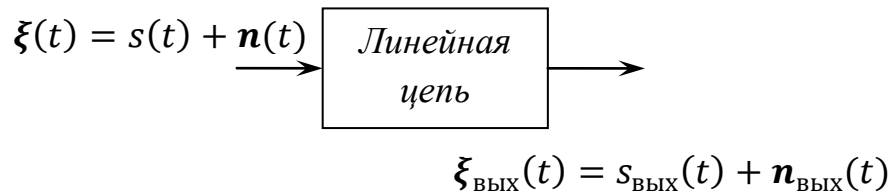


Рис.6.1. К понятию оптимального фильтра

Поскольку цепь линейная, можно рассматривать отдельно преобразование сигнала и шума, а отклик цепи также является аддитивной смесью сигнала и шума. В качестве характеристики, определяющей соотношение сигнала и шума на выходе цепи, принимается отношение сигнал/шум, которое представляет собой отношение максимального значения сигнала на выходе к среднеквадратическому отклонению шума:

$$q = \frac{\max |s_{\text{вых}}(t)|}{\sigma_{\text{вых}}}. \quad (6.2)$$

Введённая величина характеризует насколько максимальное значение сигнала превышает средний уровень шума.

Оптимальным по критерию максимума отношения сигнал/шум фильтром называется линейная цепь, которая обеспечивает максимальное отношение сигнал/шум на выходе:

$$q \rightarrow \max \quad (6.3)$$

Характеристики такой цепи определяются видом сигнала и характеристиками шума.

Представим сигнал на выходе в виде обратного преобразования Фурье

$$s_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\text{вых}}(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (6.4)$$

где спектральная плотность сигнала

$$S_{\text{вых}}(\omega) = S(\omega)H(\omega). \quad (6.5)$$

Максимальное значение сигнала на выходе

$$\max |s_{\text{вых}}(t)| = \max \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right| = \quad (6.6)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) H(\omega) e^{j\omega t_0} d\omega \right|,$$

где t_0 – момент времени, когда сигнал на выходе достигает максимального значения.

Корреляционная функция шума на выходе цепи

$$\begin{aligned} R_{\text{вых}}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} N_{\text{вых}}(\omega) e^{j\omega \tau} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} N(\omega) |H(\omega)|^2 e^{j\omega \tau} d\omega, \end{aligned} \quad (6.7)$$

где $N_{\text{вых}}(\omega) = N(\omega) |H(\omega)|^2$ – спектральная плотность мощности шума на выходе цепи. Дисперсия шума на выходе

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = R_{\text{вых}}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} N(\omega) |H(\omega)|^2 d\omega. \quad (6.8)$$

Отношение максимального значения сигнала к среднеквадратическому значению шума

$$q = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) H(\omega) e^{j\omega t_0} d\omega \right|}{\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} N(\omega) |H(\omega)|^2 d\omega}}. \quad (6.9)$$

Запишем неравенство Буняковского – Шварца

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(\omega) g(\omega) d\omega \right| \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\omega)|^2 d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\omega)|^2 d\omega}, \quad (6.10)$$

где равенство достигается только при $g(\omega) = k f(\omega)$, k – коэффициент. Обозначим $f^*(\omega) = \frac{S(\omega)}{\sqrt{N(\omega)}} e^{j\omega t_0}$, $g(\omega) = H(\omega) \sqrt{N(\omega)}$, тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) H(\omega) e^{j\omega t_0} d\omega \right| &= \\ &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S(\omega)}{\sqrt{N(\omega)}} e^{j\omega t_0} H(\omega) \sqrt{N(\omega)} d\omega \right| \leq \\ &\leq \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|S(\omega)|^2}{N(\omega)} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 N(\omega) d\omega}. \end{aligned}$$

С учётом полученного неравенства из (6.9) имеем

$$\begin{aligned} q &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|S(\omega)|^2}{N(\omega)} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 N(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} N(\omega) |H(\omega)|^2 d\omega}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|S(\omega)|^2}{N(\omega)} d\omega}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Правая часть неравенства (6.11) даёт верхнюю границу для максимально достижимого в классе линейных цепей отношения сигнал/шум

$$q_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|S(\omega)|^2}{N(\omega)} d\omega}, \quad (6.12)$$

которая определяется энергетическими спектрами сигнала и шума.

Достижение верхней границы (максимального отношения сигнал/шум) соответствует равенству в (6.10), то есть

$$H(\omega)\sqrt{N(\omega)} = g(\omega) = kf(\omega) = k \frac{S^*(\omega)}{\sqrt{N(\omega)}} e^{-j\omega t_0}, \quad (6.13)$$

откуда для КЧХ оптимальной цепи получим

$$H(\omega) = k \frac{S^*(\omega)}{N(\omega)} e^{-j\omega t_0}. \quad (6.14)$$

Отметим, что оптимальный фильтр определён с точностью до постоянного коэффициента k . В дальнейшем полагается, что $k > 0$.

АЧХ и ФЧХ оптимального фильтра

$$|H(\omega)| = k \frac{|S(\omega)|}{N(\omega)}, \quad (6.15)$$

$$\psi(\omega) = -\varphi_s(\omega) - \omega t_0. \quad (6.16)$$

Амплитудный и фазовый спектр сигнала на выходе оптимального фильтра

$$|S_{\text{вых}}(\omega)| = |S(\omega)| |H(\omega)| = k \frac{|S(\omega)|^2}{N(\omega)}, \quad (6.17)$$

$$\varphi_{S_{\text{вых}}}(\omega) = \psi(\omega) + \varphi_s(\omega) = -\omega t_0. \quad (6.18)$$

АЧХ оптимального фильтра определяется отношением амплитудного спектра сигнала к энергетическому спектру шума. Это означает, что цепь оказывается прозрачна для тех частотных полос, где уровень шума мал и располагаются интенсивные гармоники сигнала, а зашумлённые частотные полосы подавляются.

ФЧХ оптимального фильтра такова, что все гармонические составляющие сигнала на выходе складываются синфазно в момент времени t_0 , что является одной из причин обеспечения максимального отношения сигнал/шум. Для пояснения этого утверждения вернёмся к представлению сигнала (2.9):

$$s_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |S_{\text{вых}}(\omega)| \cos(\omega t + \varphi_{S_{\text{вых}}}(\omega)) d\omega.$$

Каждая гармоническая составляющая сигнала описывается выражением

$$\frac{1}{\pi} |S_{\text{вых}}(\omega)| \cos(\omega t + \varphi_{S_{\text{вых}}}(\omega)) d\omega.$$

Подставляя $\varphi_{S_{\text{ВЫХ}}}(\omega)$ из (6.18), получим

$$\frac{1}{\pi} |S_{\text{ВЫХ}}(\omega)| \cos(\omega(t - t_0)) d\omega.$$

В момент времени $t = t_0$ гармонические функции $\cos(\omega(t - t_0))$ принимают значение 1 независимо от частоты, что и соответствует синфазному сложению.

6.2. Согласованный фильтр

Рассмотрим частный случай решения задачи оптимизации цепи по критерию максимального отношения сигнал/шум на выходе, когда на цепь вместе с сигналом воздействует белый гауссов шум с спектральной плотностью мощности

$$N(\omega) = \frac{N_0}{2}. \quad (6.19)$$

Для КЧХ оптимального фильтра из (6.17) получим

$$H(\omega) = k \frac{S^*(\omega)}{N(\omega)} e^{-j\omega t_0} = \frac{2k}{N_0} S^*(\omega) e^{-j\omega t_0}. \quad (6.20)$$

Поскольку оптимальный фильтр определён с точностью до коэффициента k , то последнее выражение можно переписать в виде

$$H(\omega) = k S^*(\omega) e^{-j\omega t_0}. \quad (6.21)$$

Линейная цепь, КЧХ которой определяется полученным выражением, называется согласованным фильтром (СФ), в том смысле, что структура согласованного фильтра определённым образом соответствует форме сигнала. Действительно, как видно из (6.21), КЧХ согласованного фильтра не зависит от параметров шума.

Максимальное отношение сигнал/шум, соответствующее рассматриваемому частному случаю, найдётся из (6.12)

$$q_{\text{сф}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|S(\omega)|^2}{N(\omega)} d\omega} = \sqrt{\frac{2}{N_0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S(\omega)|^2 d\omega} = \sqrt{\frac{2E}{N_0}}, \quad (6.22)$$

где $E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S(\omega)|^2 d\omega$ - энергия сигнала.

Запишем выражения для АЧХ и ФЧХ согласованного фильтра

$$|H(\omega)| = k |S(\omega)|, \quad (6.23)$$

$$\psi(\omega) = -\varphi_s(\omega) - \omega t_0. \quad (6.24)$$

Фазо-частотная характеристика согласованного фильтра определяется таким же выражением, как и фазо-частотная характеристика оптимального фильтра, что, означает, что гармонические составляющие сигнала на выходе складываются синфазно в момент времени t_0 . Амплитудно-частотная характеристика (6.23) по

форме повторяет амплитудный спектр сигнала. Это обеспечивает подавление тех участков спектра, где располагаются несущественные гармоники сигнала и прозрачность фильтра для гармонических составляющих, имеющих существенное значение в формировании сигнала. Поскольку спектр аддитивного шума равномерен и для него каждый участок спектра «равноправен», то подавление любого из них приводит к уменьшению дисперсии.

Импульсную характеристику согласованного фильтра определим как обратное преобразование Фурье от КЧХ

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S^*(\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega = \\ &= k \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega(t_0-t)} d\omega \right)^* = ks^*(t_0 - t). \end{aligned} \quad (6.25)$$

В случае, когда сигнал – действительная функция

$$h(t) = ks(t_0 - t) = ks(-(t - t_0)). \quad (6.26)$$

График импульсной характеристики получается из графика сигнала путём его зеркального отражения относительно оси $t = 0$ и последующего сдвига на t_0 в сторону положительных абсцисс (рис.6.2). Условие физической реализуемости цепи обеспечивается при $t_0 \geq T_c$.

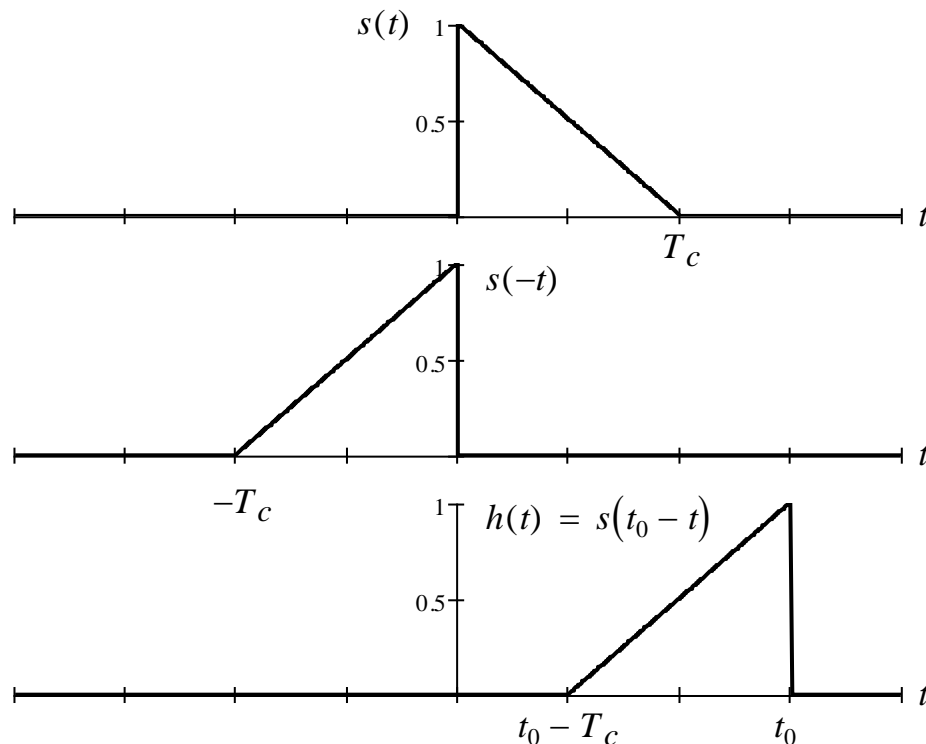


Рис.6.2. Сигнал и импульсная характеристика согласованного фильтра

Определим сигнал на выходе согласованного фильтра, при воздействии сигнала $s_{\text{вх}}(t) = \sigma(t)s_{\text{вх}}(t)$, используя формулу

Дюамеля (4.20).

$$\begin{aligned} s_{\text{ВЫХ}}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s_{\text{ВХ}}(t')h(t-t')dt' = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} s_{\text{ВХ}}(t')ks^*(t_0-(t-t'))dt' = \\ &= k \int_{-\infty}^{+\infty} s_{\text{ВХ}}(t')s^*(t'-(t-t_0))dt' = kR_{s_{\text{ВХ}}s}(t-t_0), \end{aligned} \quad (6.27)$$

где $R_{s_{\text{ВХ}}s}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_{\text{ВХ}}(t)s^*(t-\tau)dt$ – временная ВКФ сигналов $s_{\text{ВХ}}(t)$ и $s(t)$.

Сигнал на выходе согласованного фильтра по форме совпадает с временной ВКФ сигнала на входе и сигнала, с которым согласован фильтр. В момент времени $t = t_0$ отсчёт сигнала пропорционален коэффициенту взаимной корреляции

$$s_{\text{ВЫХ}}(t_0) = kR_{s_{\text{ВХ}}s}. \quad (6.27a)$$

Это указывает на возможность использования согласованного фильтра вместо коррелятора (рис.6.3).

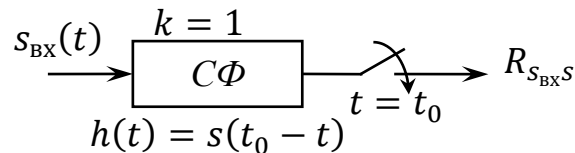


Рис.6.3. Получение коэффициента корреляции сигналов на выходе СФ

В качестве примера на рис.6.4 показаны прямоугольный и меандровый импульсы, их ВКФ и сигнал на выходе фильтра, согласованного с прямоугольным импульсом, при воздействии меандрового импульса.

В случае, когда на вход согласованного фильтра поступает сигнал, по форме совпадающий с тем, с которым согласован фильтр, $s_{\text{ВХ}}(t) = s(t)$, а реакция цепи будет иметь форму АКФ сигнала. В момент времени $t = t_0$ значение сигнала на выходе согласованного фильтра пропорционально энергии сигнала

$$s_{\text{ВЫХ}}(t_0) = kE. \quad (6.27б)$$

На рис.6.5 показан прямоугольный импульс, его АКФ и сигнал на выходе согласованного фильтра при воздействии прямоугольного импульса.

На рис.6.6 - 6.9 показаны примеры согласованной фильтрации прямоугольного импульса длительностью $\tau_{\text{и}} = 100\text{мс}$ при различных значениях отношения сигнал/шум.

Дисперсия шума на выходе согласованного фильтра опреде-

ляется (4.27), где энергия импульсной характеристики с учётом (6.25)

$$E_h = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 |s(t_0 - t)|^2 dt = k^2 E,$$

откуда

$$\sigma_{\text{ВЫХ}}^2 = k^2 \frac{N_0 E}{2}. \quad (6.28)$$

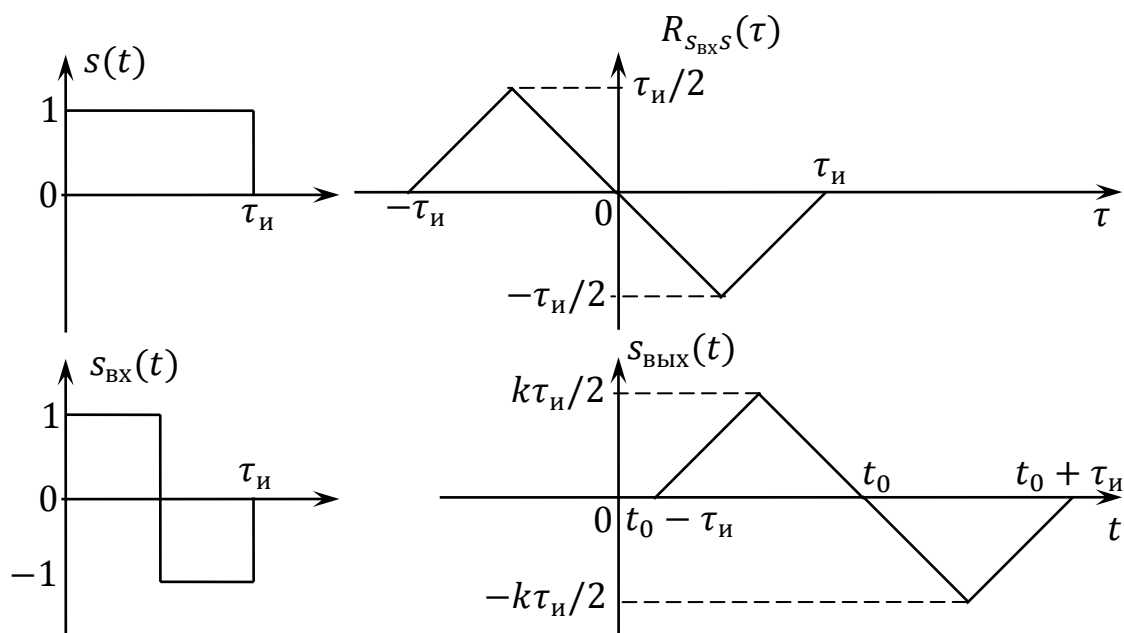


Рис.6.4. Сигналы, их ВКФ и отклик согласованного фильтра

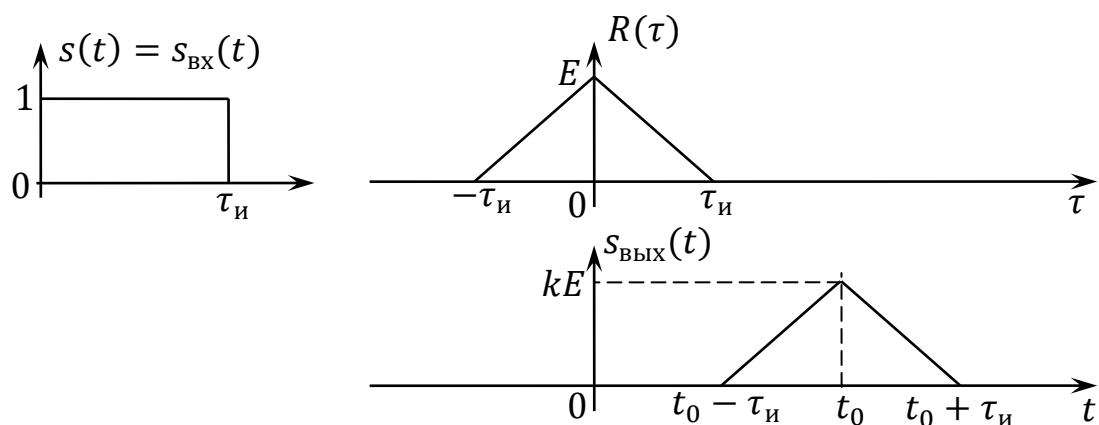


Рис.6.5. Прямоугольный импульс, его АКФ и отклик согласованного фильтра

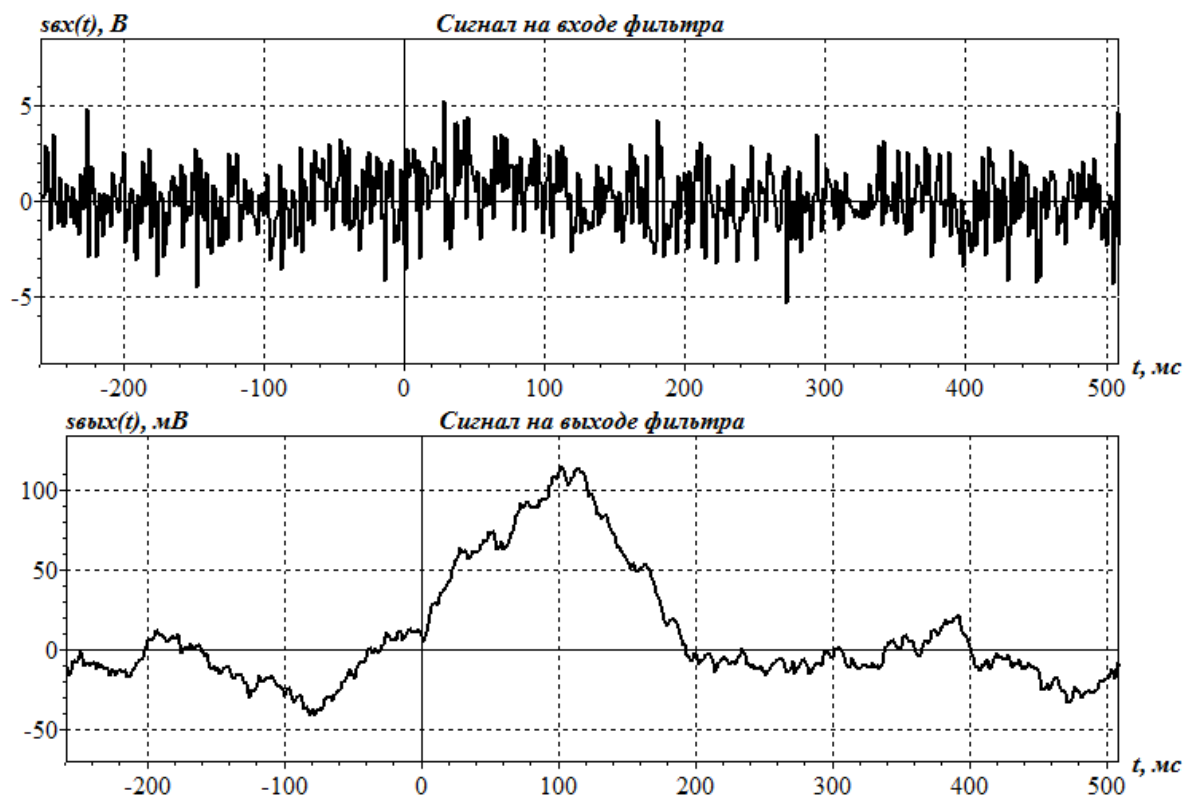


Рис.6.6. Согласованная фильтрация прямоугольного импульса при отношении сигнал/шум $q = 5$.

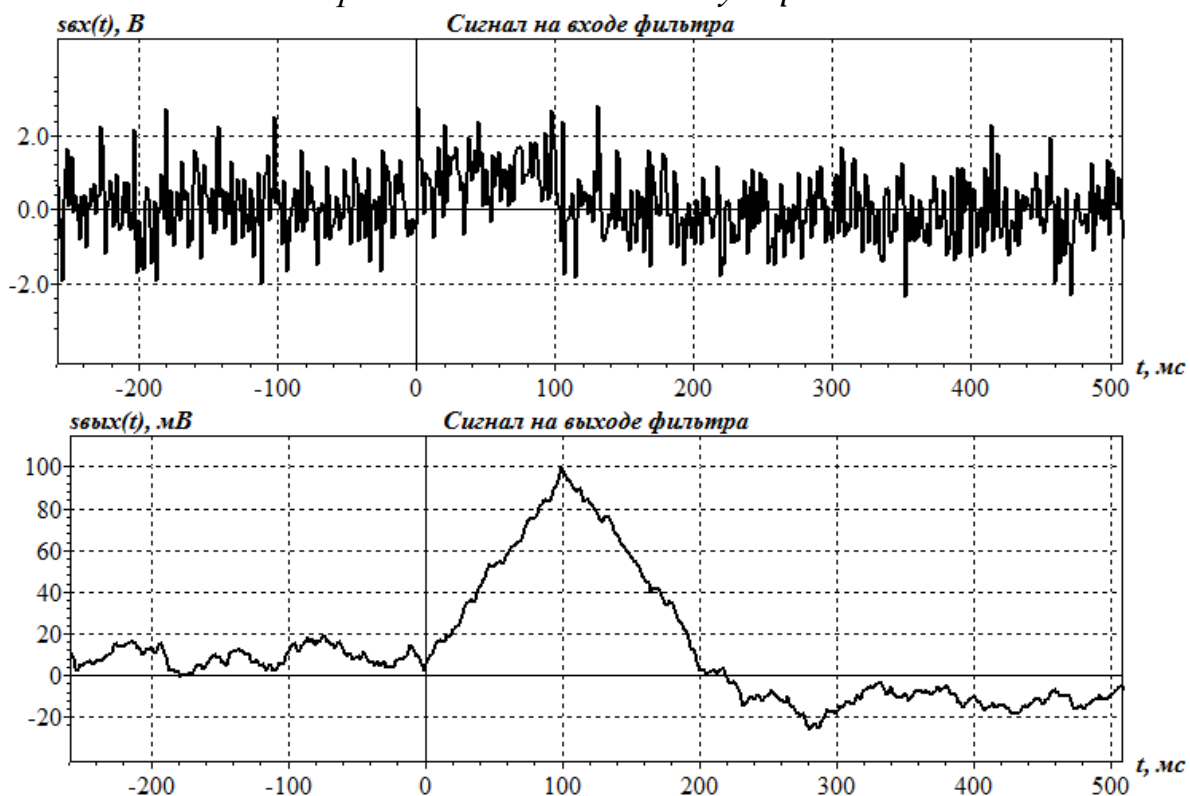


Рис.6.7. Согласованная фильтрация прямоугольного импульса при отношении сигнал/шум $q = 10$.

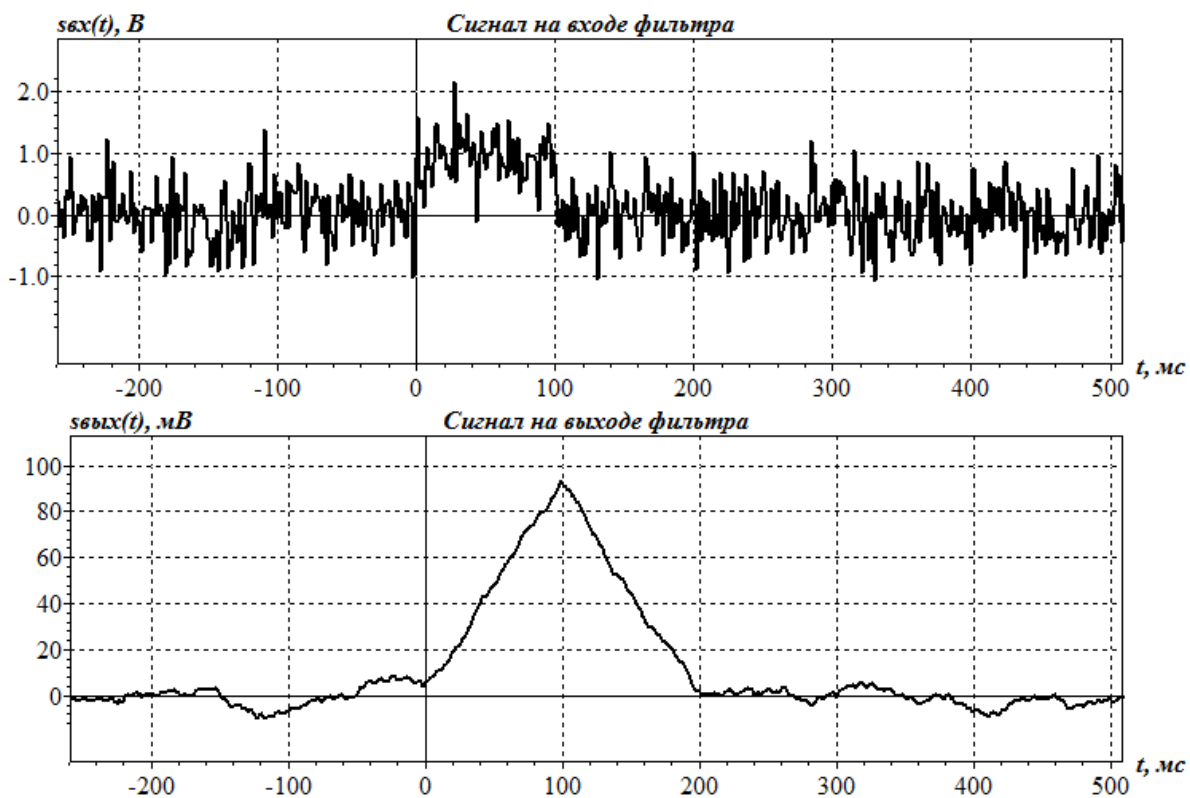


Рис.6.8. Согласованная фильтрация прямоугольного импульса при отношении сигнал/шум $q = 20$.

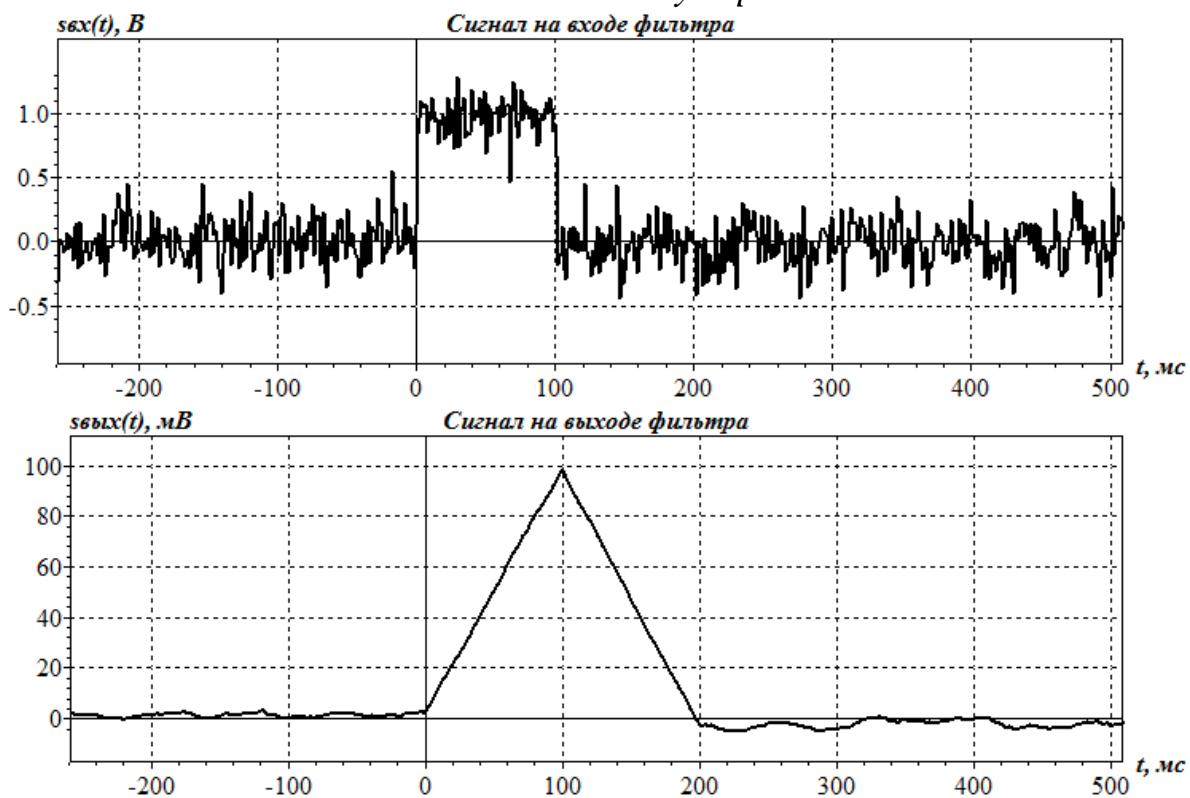


Рис.6.9. Согласованная фильтрация прямоугольного импульса при отношении сигнал/шум $q = 50$.

6.3. Структура оптимального фильтра

Преобразуем выражение для КЧХ оптимального фильтра

$$H(\omega) = k \frac{S^*(\omega)}{N(\omega)} e^{-j\omega t_0} = \sqrt{\frac{N_0}{2}} \frac{1}{\sqrt{N(\omega)}} k_2 \frac{S^*(\omega)}{\sqrt{N(\omega)}} e^{-j\omega t_0} = \quad (6.29)$$

$$= H_1(\omega) H_2(\omega),$$

где $k = \sqrt{\frac{N_0}{2}} k_2$, $H_1(\omega) = \sqrt{\frac{N_0}{2}} \frac{1}{\sqrt{N(\omega)}}$, $H_2(\omega) = k_2 \frac{S^*(\omega)}{\sqrt{N(\omega)}} e^{-j\omega t_0}$.

Оптимальному фильтру, таким образом, соответствует последовательное соединение двух звеньев с КЧХ $H_1(\omega)$ и $H_2(\omega)$ (рис.6.10).

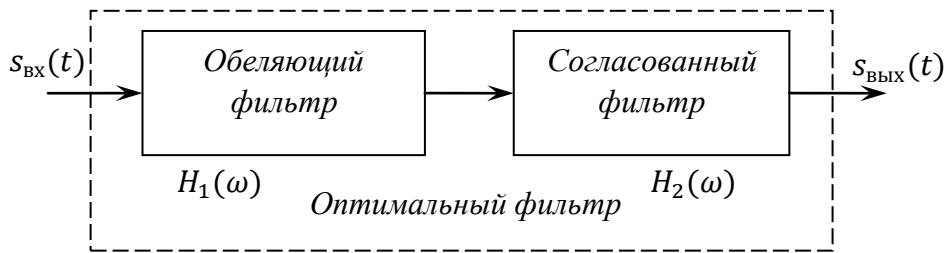


Рис.6.10. Структура оптимального фильтра

Рассмотрим воздействие на оптимальный фильтр аддитивной смеси сигнала и шума. Энергетический спектр шума на выходе первого звена

$$N_1(\omega) = |H_1(\omega)|^2 N(\omega) = \frac{N_0}{2} \frac{N(\omega)}{N(\omega)} = \frac{N_0}{2} \quad (6.30)$$

равномерный, то есть первое звено преобразует шум на входе в белый шум и называется обеляющим фильтром. Отметим, что ФЧХ обеляющего фильтра может быть произвольной.

Определим спектр сигнала на выходе первого звена

$$S_1(\omega) = H_1(\omega) S(\omega) = \sqrt{\frac{N_0}{2}} \frac{S(\omega)}{\sqrt{N(\omega)}}, \quad (6.31)$$

и запишем выражение для КЧХ соответствующего ему согласованного фильтра:

$$H_{сф1}(\omega) = k_2 S_1^*(\omega) e^{-j\omega t_0} = k_2 \frac{S^*(\omega)}{\sqrt{N(\omega)}} e^{-j\omega t_0} = H_2(\omega), \quad (6.32)$$

где учтено, что согласованный фильтр определён с точностью до постоянного коэффициента. Второе звено оптимального фильтра является согласованным фильтром для сигнала, получаемого на выходе первого звена.

Оптимальный фильтр представляет собой последовательное соединение обеляющего и согласованного фильтров.

6.4. Согласованные фильтры для радиосигналов

Амплитудно-частотная характеристика согласованного с радиосигналом

$$s(t) = v(t) \cos [\omega_0 t + \varphi(t)] \quad (6.33)$$

фильтра повторяет его амплитудный спектр, поэтому фильтр является узкополосной цепью. Импульсная характеристика согласованного фильтра определяется выражением (6.26):

$$\begin{aligned} h(t) &= ks(t_0 - t) = \\ &= v(t_0 - t) \cos[\omega_0(t_0 - t) + \varphi(t_0 - t)] = \\ &= kv(t_0 - t) \cos[\omega_0 t - \omega_0 t_0 - \varphi(t_0 - t)] = \\ &= v_h(t) \cos [\omega_0 t + \varphi_h(t)], \end{aligned} \quad (6.34)$$

где $v_h(t) = kv(t_0 - t)$, $\varphi_h(t) = -\omega_0 t_0 - \varphi(t_0 - t)$ - огибающая и мгновенная фаза импульсной характеристики.

Комплексная огибающая импульсной характеристики

$$\begin{aligned} \dot{v}_h(t) &= v_h(t) e^{j\varphi_h(t)} = kv(t_0 - t) e^{-j\varphi(t_0 - t)} e^{-j\omega_0 t_0} = \\ &= k\dot{v}^*(t_0 - t) e^{-j\omega_0 t_0}, \end{aligned} \quad (6.35)$$

где $\dot{v}(t) = v(t) e^{j\varphi(t)}$ - комплексная огибающая сигнала.

Импульсная характеристика низкочастотного эквивалента согласованного фильтра в соответствии с (4.34)

$$h_{\text{НЧЭ}}(t) = \frac{1}{2} \dot{v}_h(t) = \frac{1}{2} k \dot{v}^*(t_0 - t) e^{-j\omega_0 t_0} = \dot{k} \dot{v}^*(t_0 - t), \quad (6.36)$$

где $\dot{k} = \frac{1}{2} k e^{-j\omega_0 t_0}$, причём только аргумент этого комплексного коэффициента определён однозначно.

Комплексная частотная характеристика низкочастотного эквивалента

$$\begin{aligned} H_{\text{НЧЭ}}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h_{\text{НЧЭ}}(t) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \dot{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}^*(t_0 - t) e^{-j\omega t} dt = \\ &= -\dot{k} e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}^*(-(t - t_0)) e^{-j\omega(t - t_0)} d[-(t - t_0)] = \\ &= \dot{k} e^{-j\omega t_0} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}(t) e^{-j\omega t} dt \right)^* = \dot{k} \dot{V}^*(\omega) e^{-j\omega t_0}, \end{aligned} \quad (6.37)$$

где $\dot{V}(\omega)$ - спектральная плотность комплексной огибающей сигнала.

Характеристики низкочастотного эквивалента и комплексная огибающая сигнала связаны соотношениями аналогичными (6.21), (6.25). Это определяет один из возможных путей синтеза согласованных фильтров для радиосигналов: сначала проектируется низкочастотный эквивалент согласованного фильтра, а затем

осуществляется переход к самой узкополосной цепи. Этот подход оказывается особенно удобным в случае простых радиосигналов без угловой модуляции.

Рассмотрим сигнал на выходе согласованного фильтра при воздействии радиосигнала

$$s_{\text{BX}}(t) = v_{\text{BX}}(t) \cos [(\omega_0 + \Delta\Omega)t + \varphi_{\text{BX}}(t) + \theta], \quad (6.38)$$

где $\Delta\Omega$ - смещение частоты, θ - начальная фаза сигнала.

Выражение для комплексной огибающей воздействия имеет вид

$$\dot{v}_{\text{BX}}(t, \Delta\Omega, \theta) = v_{\text{BX}}(t) e^{j\varphi_{\text{BX}}(t)} e^{j\Delta\Omega t} e^{j\theta} = \dot{v}_{\text{BX}}(t) e^{j\Delta\Omega t} e^{j\theta},$$

где $\dot{v}_{\text{BX}}(t) = \dot{v}_{\text{BX}}(t, 0, 0)$.

Комплексная огибающая сигнала на выходе

$$\begin{aligned} \dot{v}_{\text{ВЫХ}}(t, \Delta\Omega, \theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}_{\text{BX}}(x, \Delta\Omega, \theta) h_{\text{НЧЭ}}(t - x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}_{\text{BX}}(x) e^{-j\Delta\Omega x} e^{j\theta} \dot{k} \dot{v}^*(t_0 - (t - x)) dx = \\ &= \dot{k} e^{j\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}_{\text{BX}}(x) \dot{v}^*(x - (t - t_0)) e^{j\Delta\Omega x} dx = \\ &= \dot{k} e^{j\theta} \dot{\rho}_{s_{\text{BX}}s}(\Delta\Omega, t - t_0), \end{aligned} \quad (6.39)$$

где $\dot{\rho}_{s_{\text{BX}}s}(\Delta\Omega, \Delta\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}_{\text{BX}}(t) \dot{v}^*(t - \Delta\tau) e^{j\Delta\Omega t} dt$ - частотно-временная ВКФ сигналов (5.90).

Огибающая сигнала на выходе

$$\begin{aligned} v_{\text{ВЫХ}}(t, \Delta\Omega) &= \frac{k}{2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}_{\text{BX}}(x) \dot{v}^*(x - (t - t_0)) e^{j\Delta\Omega x} dx \right| = \\ &= \frac{k}{2} \rho_{s_{\text{BX}}s}(\Delta\Omega, t - t_0) \end{aligned} \quad (6.40)$$

пропорциональна модулю частотно-временной ВКФ сигнала на входе и сигнала, с которым согласован фильтр. Когда частотный сдвиг отсутствует ($\Delta\Omega = 0$), огибающая (6.40) в момент $t = t_0$ пропорциональна модулю коэффициента корреляции комплексных огибающих входного сигнала и сигнала, с которым согласован фильтр. В этом случае согласованный фильтр, нагруженный на линейный детектор огибающей (ДО) может быть использован как коррелятор огибающих (рис.6.11).

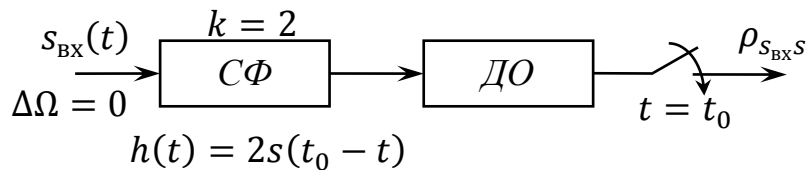


Рис.6.11. Получение коэффициента корреляции огибающих

Рассмотрим некоторые частные случаи. Пусть сигнал на входе представляет собой результат частотного смещения сигнала с которым согласован фильтр, тогда $\dot{v}_{\text{вх}}(t) = \dot{v}(t)$,

$$\dot{v}_{\text{вых}}(t, \Delta\Omega) = k e^{j\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}(t') \dot{v}^*(t' - (t - t_0)) e^{j\Delta\Omega t'} dt' = k e^{j\theta} \dot{\rho}(\Delta\Omega, t - t_0); \quad (6.41)$$

$$v_{\text{вых}}(t, \Delta\Omega) = \frac{k}{2} \rho(\Delta\Omega, t - t_0), \quad (6.42)$$

где $\dot{\rho}(\Delta\Omega, \Delta\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}(t) \dot{v}^*(t - \Delta\tau) e^{j\Delta\Omega t} dt$ – частотно-временная АКФ сигнала (5.91). Огибающая сигнала по форме повторяет контур сечения модуля частотно-временной АКФ сигнала плоскостью $\Delta\Omega = \text{const}$ (рис.6.12).

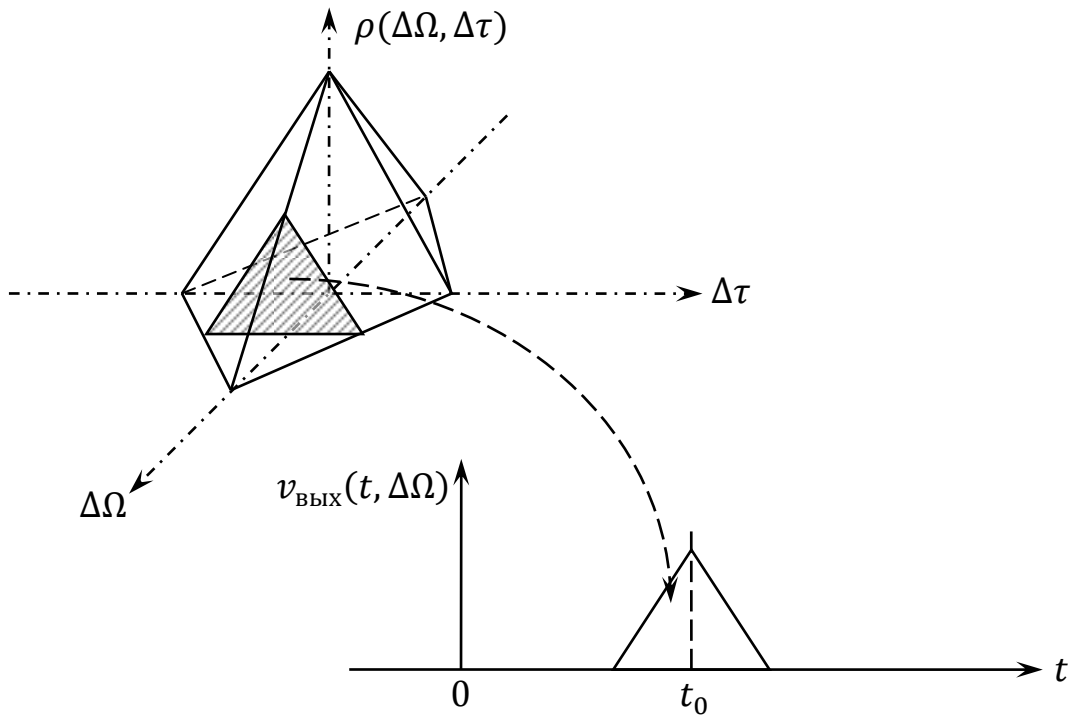


Рис.6.12. Модуль частотно-временной АКФ и огибающая сигнала на выходе СФ

Когда частотный сдвиг отсутствует ($\Delta\Omega = 0$):

$$\dot{v}_{\text{вых}}(t, 0, \theta) = k e^{j\theta} \dot{\rho}(t - t_0, 0) = k e^{j\theta} \dot{\rho}(t - t_0); \quad (6.43)$$

$$v_{\text{вых}}(t, 0) = \frac{k}{2} \rho(t - t_0), \quad (6.44)$$

где $\dot{\rho}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}(t) \dot{v}^*(t - \tau) dt$ – автокорреляционная функция комплексной огибающей сигнала. Огибающая сигнала на выходе по форме совпадает с огибающей автокорреляционной функции сигнала, с которым согласован фильтр.

Сигнал на выходе согласованного фильтра

$$\begin{aligned} s_{\text{ВЫХ}}(t, 0, \theta) &= \operatorname{Re}(\dot{v}_{\text{ВЫХ}}(t, 0, \theta)e^{j\omega_0 t}) = \\ &= \operatorname{Re}(\dot{k}e^{j\theta}\dot{\rho}(t-t_0)e^{j\omega_0 t}) = \\ &= \frac{k}{2}\operatorname{Re}(\rho(t-t_0)e^{j(\omega_0(t-t_0)+\varphi_\rho(t-t_0)+\theta)}) = \\ &= \frac{k}{2}\rho(t-t_0)\cos[\omega_0(t-t_0)+\varphi_\rho(t-t_0)+\theta], \end{aligned} \quad (6.45)$$

где $\varphi_\rho(\tau) = \arg(\dot{\rho}(\tau))$ - аргумент автокорреляционной функции комплексной огибающей сигнала. При $\theta = 0$ сигнал на выходе согласованного фильтра по форме совпадает с АКФ радиосигнала, максимальное значение достигается при $t = t_0$.

6.5. Квазиоптимальный фильтр

В большинстве практических случаев возникают трудности с практической реализацией линейных цепей, соответствующих, получаемым при синтезе согласованных фильтров, характеристикам. В этих случаях фильтры реализуются приближённо и называются квазиоптимальными. Параметры квазиоптимальной цепи выбирают так, чтобы максимизировать показатель качества

$$\rho = \frac{q}{q_{\text{сф}}} \leq 1, \quad (6.46)$$

где $q_{\text{сф}} = \sqrt{\frac{2E}{N_0}}$ - отношение сигнал/шум, обеспечиваемое согласованным фильтром (6.22),

$q = \frac{\max |s_{\text{ВЫХ}}(t)|}{\sigma_{\text{ВЫХ}}}$ - отношение сигнал/шум, обеспечиваемое квазиоптимальным фильтром, $\max |s_{\text{ВЫХ}}(t)|$ - максимальное значение сигнала на выходе квазиоптимальной цепи, $\sigma_{\text{ВЫХ}} = \sqrt{\frac{N_0 E_h}{2}}$ - СКО шума на выходе квазиоптимального фильтра (4.27), E_h - энергия импульсной характеристики квазиоптимальной цепи.

Подставив выражения для q и $q_{\text{сф}}$ в (6.46), получим

$$\rho = \frac{\max |s_{\text{ВЫХ}}(t)|}{\sqrt{\frac{N_0 E_h}{2}}} \bigg/ \sqrt{\frac{2E}{N_0}} = \frac{\max |s_{\text{ВЫХ}}(t)|}{\sqrt{E E_h}}. \quad (6.47)$$

Проектирование квазиоптимального фильтра можно представить в виде последовательности нескольких этапов:

1. Выбирается вид цепи. Выбранная цепь характеризуется одним или несколькими параметрами. Такими параметрами

могут быть, например, постоянная времени или полоса пропускания цепи.

2. Определяется максимальное значение сигнала на выходе цепи при воздействии сигнала заданного вида и энергия импульсной характеристики цепи.
3. Определяются параметры цепи, соответствующие максимальному значению показателя качества и максимальное значение показателя качества.
4. На основе анализе максимального значения показателя качества принимается решение о возможности использования выбранной цепи в качестве квазиоптимального фильтра. Чем ближе значение максимального показателя качества к единице, тем более подходит выбранная цепь для замещения согласованного фильтра.

Первый этап проектирования квазиоптимального фильтра является не формализованным. Структура цепи может определяться, например, структурой нереализуемого согласованного фильтра, в которой идеальные интеграторы реализуются приближённо, и параметром оптимизации является их постоянная времени. Часто в качестве квазиоптимальных цепей для видеосигналов рассматриваются фильтры нижних частот, полоса пропускания которых выбирается из условия оптимизации показателя качества, а для радиосигналов – полосовые фильтры.

Рассмотрим некоторые примеры проектирования квазиоптимальных фильтров для прямоугольного видеоимпульса.

6.5.1. Квазиоптимальный фильтр для прямоугольного видеоимпульса с неидеальным интегратором

Определим структуру согласованного фильтра для прямоугольного импульса длительностью $\tau_{\text{и}}$:

$$s(t) = \text{rect}\left(\frac{t-0.5\tau_{\text{и}}}{\tau_{\text{и}}}\right).$$

Импульсная характеристика согласованного фильтра при $t_0 = \tau_{\text{и}}$:

$$h(t) = ks(\tau_{\text{и}} - t) = k\text{rect}\left(\frac{\tau_{\text{и}} - t - 0.5\tau_{\text{и}}}{\tau_{\text{и}}}\right) = k\text{rect}\left(\frac{t-0.5\tau_{\text{и}}}{\tau_{\text{и}}}\right) =$$
$$= k[\sigma(t) - \sigma(t - \tau_{\text{и}})] = k \int_0^t [\delta(t') - \delta(t' - \tau_{\text{и}})] dt'.$$

Структурная схема устройства обладающего полученной импульсной характеристикой показана на рис.6.13.

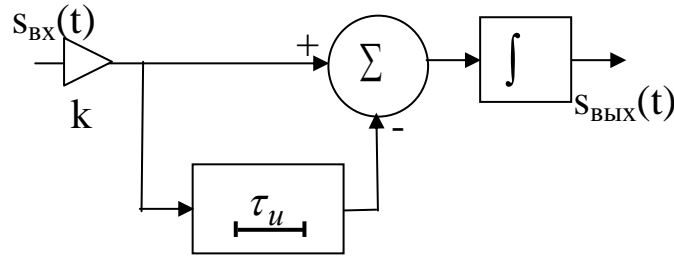


Рис.6.13. СФ для прямоугольного импульса

Согласованный фильтр для прямоугольного импульса содержит идеальный интегратор, нереализуемый на практике. Рассмотрим в качестве интегратора цепь первого порядка с характеристиками

$$H_{\text{и}}(\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau}; h_{\text{и}}(t) = \frac{1}{\tau}\sigma(t)e^{-\frac{t}{\tau}}; g_{\text{и}}(t) = \sigma(t)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

где τ - постоянная времени, является единственным параметром цепи.

Импульсная характеристика соответствующего квазиоптимального фильтра (рис.6.13):

$$h(t) = k[h_{\text{и}}(t) - h_{\text{и}}(t - \tau_{\text{и}})],$$

её энергия:

$$\begin{aligned} E_h &= \int_0^{+\infty} h^2(t)dt = k^2 \int_0^{+\infty} [h_{\text{и}}(t) - h_{\text{и}}(t - \tau_{\text{и}})]^2 dt = \\ &= k^2 (\int_0^{+\infty} h_{\text{и}}^2(t)dt + \int_0^{+\infty} h_{\text{и}}^2(t - \tau_{\text{и}})dt - \\ &\quad - 2 \int_0^{+\infty} h_{\text{и}}(t)h_{\text{и}}(t - \tau_{\text{и}})dt) = \\ &= 2k^2 [R_h(0) - R_h(\tau_{\text{и}})], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R_h(x)|_{x \geq 0} &= \int_0^{+\infty} h_{\text{и}}(t)h_{\text{и}}(t - x)dt = \frac{1}{\tau^2} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} e^{-\frac{t-x}{\tau}} dt = \\ &= -\frac{e^{\frac{x}{\tau}}}{2\tau} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{2t}{\tau}} d\left(-\frac{2t}{\tau}\right) = \frac{e^{\frac{x}{\tau}}}{2\tau} e^{-\frac{2x}{\tau}} = \frac{1}{2\tau} e^{-\frac{x}{\tau}}. \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение, для энергии импульсной характеристики запишем:

$$E_h = \frac{k^2}{\tau} \left(1 - e^{-\frac{\tau_{\text{и}}}{\tau}}\right).$$

Переходная характеристика квазиоптимального фильтра:

$$g(t) = k[g_{\text{и}}(t) - g_{\text{и}}(t - \tau_{\text{и}})].$$

Сигнал на выходе фильтра при воздействии прямоугольного импульса из (4.19):

$$\begin{aligned} s_{\text{ВЫХ}}(t) &= g(t) - g(t - \tau_{\text{и}}) = \\ &= k[g_{\text{и}}(t) - 2g_{\text{и}}(t - \tau_{\text{и}}) + g_{\text{и}}(t - 2\tau_{\text{и}})]. \end{aligned}$$

Максимальное значение сигнала достигается при $t = \tau_{\text{и}}$

$$\max |s_{\text{ВЫХ}}(t)| = k g_{\text{и}}(\tau_{\text{и}}) = k(1 - e^{-\frac{\tau_{\text{и}}}{\tau}}).$$

Энергия сигнала $E = \tau_{\text{и}}$.

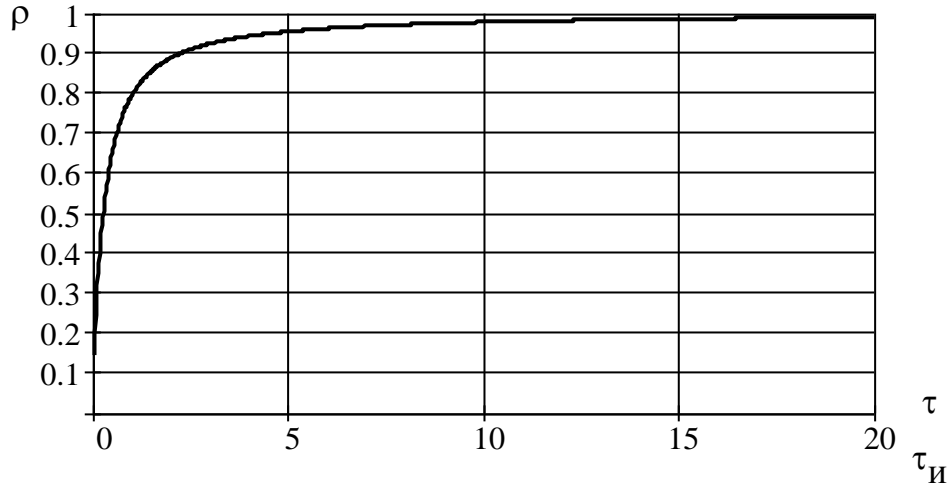


Рис.6.14. Показатель качества квазиоптимального фильтра с неидеальным интегратором

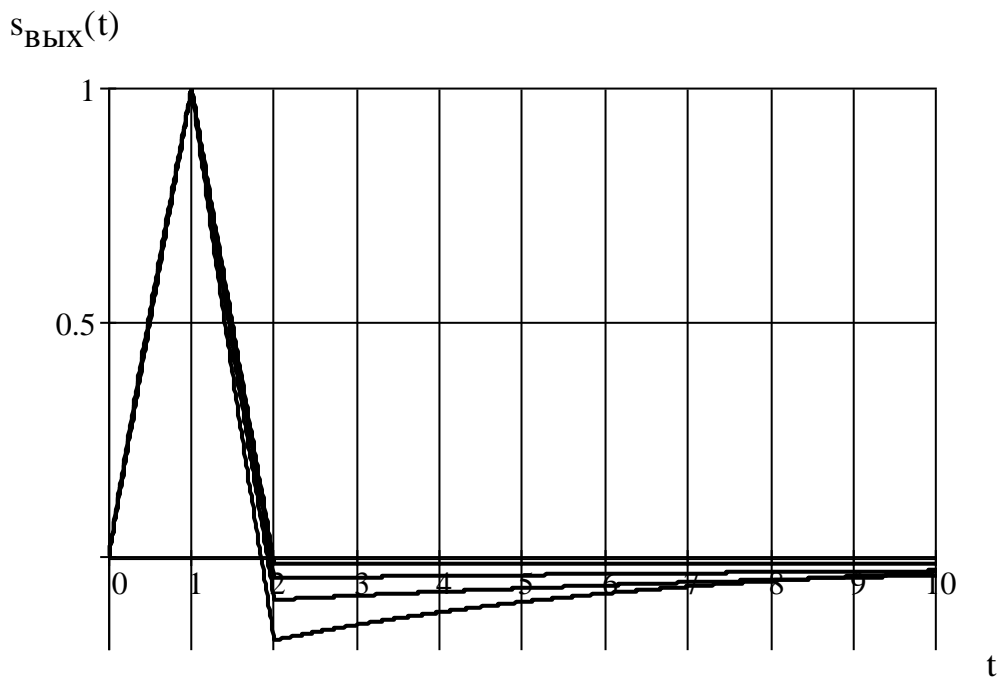


Рис.6.15. Сигнал на выходе квазиоптимального фильтра
 Показатель качества фильтра:

$$\rho = \frac{\max |s_{\text{ВЫХ}}(t)|}{\sqrt{E E_h}} = \frac{k(1 - e^{-\frac{\tau_{\text{и}}}{\tau}})}{\sqrt{\frac{k^2}{\tau} (1 - e^{-\frac{\tau_{\text{и}}}{\tau}}) \tau_{\text{и}}}} = \sqrt{\frac{\tau}{\tau_{\text{и}}} (1 - e^{-\frac{\tau_{\text{и}}}{\tau}})}.$$

График зависимости показателя качества от отношения $\tau/\tau_{и}$ показан на рис.6.14.

Выбирая различные значения постоянной времени интегратора, для показателя качества можно получить:

- при $\tau = 5\tau_{и}$ $\rho = 0.95$;
- при $\tau = 10\tau_{и}$ $\rho = 0.976$;
- при $\tau = 20\tau_{и}$ $\rho = 0.988$.
- при $\tau = 100\tau_{и}$ $\rho = 0.998$.

График сигнала на выходе полученного фильтра при различных соотношениях между постоянной времени и длительностью импульса показан на рис.6.15. Длительность импульса равна единице, коэффициент передачи фильтра k выбирался так, чтобы максимальное значение сигнала на выходе было равно единице.

6.5.2. Квазиоптимальный фильтр для прямоугольного импульса на основе фильтра нижних частот первого порядка

Импульсная и переходная характеристики фильтра нижних частот (ФНЧ) первого порядка определяются выражениями:

$$h(t) = \frac{1}{\tau} \sigma(t) e^{-\frac{t}{\tau}}; g(t) = \sigma(t)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

Энергия импульсной характеристики

$$E_h = \int_0^{+\infty} h^2(t) dt = \frac{1}{\tau^2} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \frac{1}{2\tau}.$$

Сигнал на выходе цепи (см. (4.19))

$$s_{\text{вых}}(t) = g(t) - g(t - \tau_{и}).$$

достигает максимального значения при $t = \tau_{и}$, равного

$$\max |s_{\text{вых}}(t)| = g(\tau_{и}) = (1 - e^{-\frac{\tau_{и}}{\tau}}).$$

Показатель качества квазиоптимального фильтра:

$$\rho = \frac{\max |s_{\text{вых}}(t)|}{\sqrt{E_h E}} = \sqrt{2 \frac{\tau}{\tau_{и}}} (1 - e^{-\frac{\tau_{и}}{\tau}}).$$

График зависимости $\rho\left(\frac{\tau}{\tau_{и}}\right)$ показан на рис.6.16. Максимального значения, равного $\rho_{\text{max}} = 0.903$, показатель качества достигает при $\tau = 0.8\tau_{и}$.

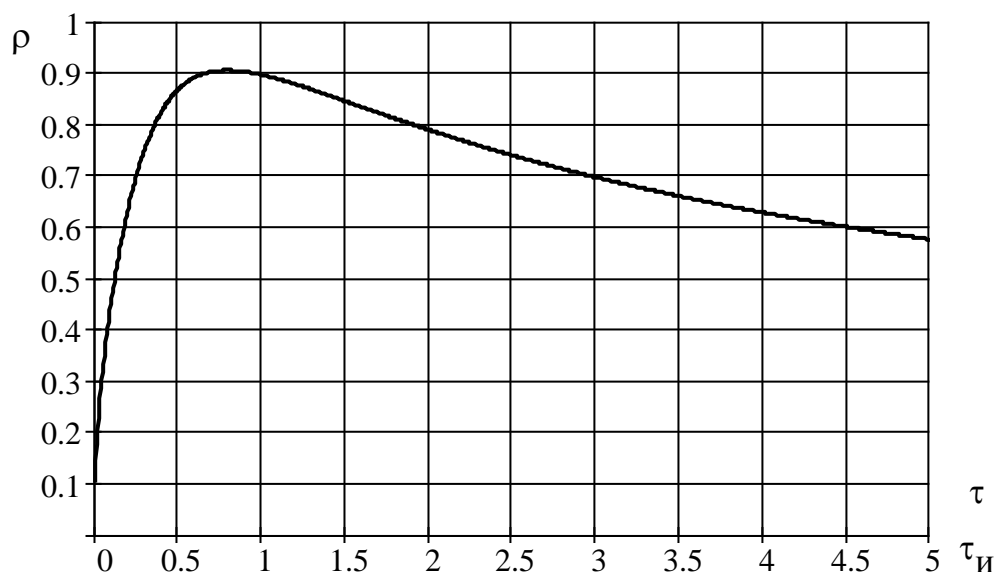


Рис.6.16. Показатель качества квазиоптимального фильтра на основе ФНЧ 1-го порядка.

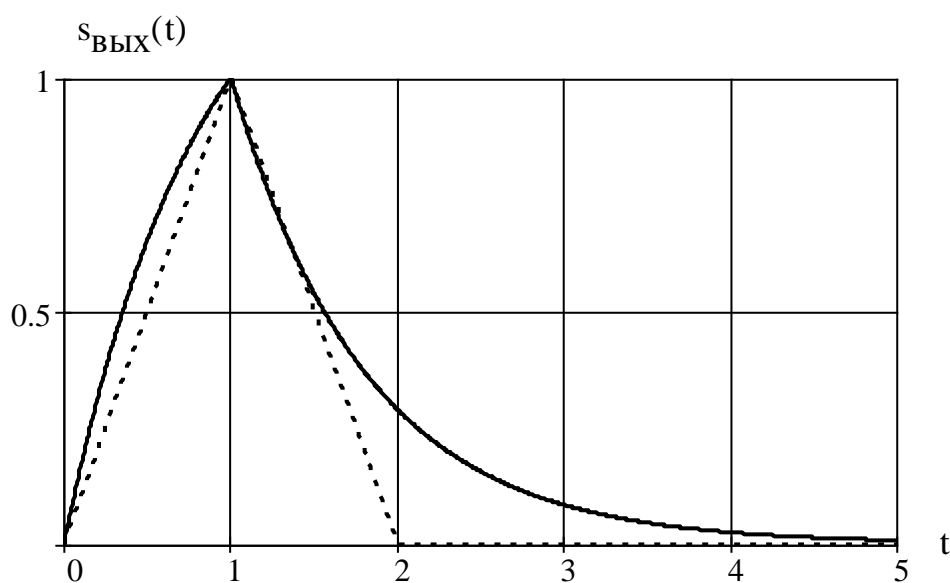


Рис.6.17. Сигнал на выходе квазиоптимального фильтра

Сигнал на выходе цепи с выбранной постоянной времени при воздействии прямоугольного импульса показан на рис.6.17. Пунктиром показан отклик согласованного фильтра.

6.5.3. Квазиоптимальный фильтр для прямоугольного видеоимпульса на основе идеального фильтра нижних частот

Идеальный фильтр нижних частот физически нереализуем, но реализуются цепи, характеристики которых с некоторой степенью точности аппроксимируют характеристики идеального

фильтра нижних частот. К таким цепям относятся, например, фильтры Баттерворта и Чебышёва. Однако, выражения для их характеристик и анализ прохождения сигнала довольно громоздки. Поэтому в данном разделе идеальный фильтр нижних частот следует рассматривать как идеализированную цепь, теоретически обобщающую свойства цепей с амплитудно-частотными характеристиками близкими к прямоугольной.

Основные характеристики идеального фильтра нижних частот:

$$H(\omega) = k \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_B}\right) e^{-j\omega\tau_0}; h(t) = \frac{k\omega_B}{\pi} \operatorname{sinc}(\omega_B(t - \tau_0));$$

$$g(t) = k \operatorname{Si}(\omega_B(t - \tau_0)),$$

где $\operatorname{Si}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^t \operatorname{sinc}(x) dx$ – интегральный синус, ω_B – верхняя граница полосы пропускания.

Энергия импульсной характеристики:

$$E_h = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 d\omega = \frac{k^2 \omega_B}{\pi}.$$

Сигнал на выходе при воздействии прямоугольного импульса (см. (4.19)):

$$s_{\text{вых}}(t) = g(t) - g(t - \tau_{\text{и}}) =$$

$$= k[\operatorname{Si}(\omega_B(t - \tau_0)) - \operatorname{Si}(\omega_B(t - \tau_0 - \tau_{\text{и}}))].$$

Производная сигнала

$$s'_{\text{вых}}(t) = g'(t) - g'(t - \tau_{\text{и}}) = h(t) - h(t - \tau_{\text{и}}) =$$

$$= \frac{k\omega_B}{\pi} [\operatorname{sinc}(\omega_B(t - \tau_0)) - \operatorname{sinc}(\omega_B(t - \tau_0 - \tau_{\text{и}}))].$$



Рис. 6.18. Показатель качества квазиоптимального фильтра на основе идеального ФНЧ.

Приравнивая производную к нулю, получим условие максимума:

$$\text{sinc}(\omega_B(t - \tau_0)) - \text{sinc}(\omega_B(t - \tau_0 - \tau_{\text{и}})) = 0.$$

Решение этого уравнения, соответствующее максимуму сигнала:
 $t = \tau_0 + 0.5\tau_{\text{и}}$.

Максимальное значение сигнала

$$\max|s_{\text{вых}}(t)| = k \left[\text{Si}\left(\frac{\omega_B \tau_{\text{и}}}{2}\right) - \text{Si}\left(-\frac{\omega_B \tau_{\text{и}}}{2}\right) \right].$$

Параметр качества

$$\rho = \frac{k \left[\text{Si}\left(\frac{\omega_B \tau_{\text{и}}}{2}\right) - \text{Si}\left(-\frac{\omega_B \tau_{\text{и}}}{2}\right) \right]}{\sqrt{\frac{k^2 \omega_B \tau_{\text{и}}}{\pi}}} = \sqrt{\pi} \frac{\left[\text{Si}\left(\frac{\omega_B \tau_{\text{и}}}{2}\right) - \text{Si}\left(-\frac{\omega_B \tau_{\text{и}}}{2}\right) \right]}{\sqrt{\omega_B \tau_{\text{и}}}}.$$

График показателя качества $\rho(\omega_B \tau_{\text{и}})$ показан на рис.6.18. Максимум достигается при $\omega_B \approx \frac{4.3}{\tau_{\text{и}}}$, максимальное значение показателя качества $\rho_{\text{max}} \approx 0.908$. Нормированная к максимальному значению временная диаграмма сигнала на выходе фильтра при воздействии прямоугольного импульса с $\tau_{\text{и}} = 1$ показана на рис.6.19. Пунктиром показан график сигнала на выходе согласованного фильтра.

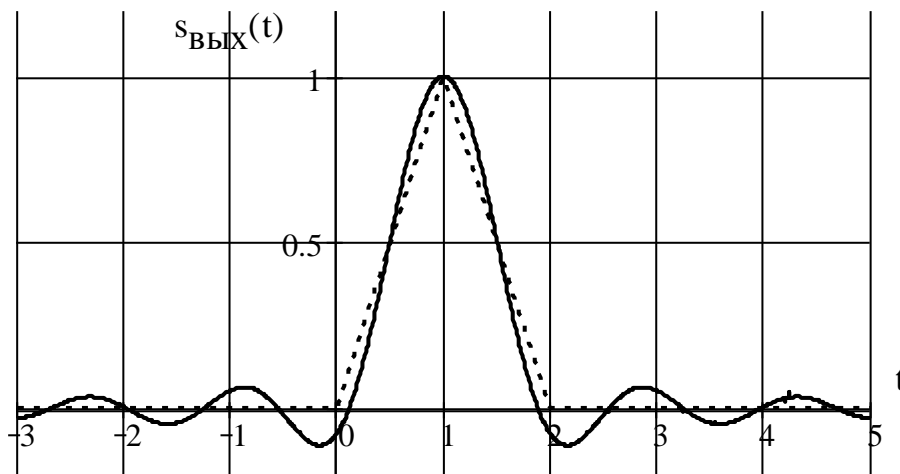


Рис.6.19. Сигнал на выходе квазиоптимального фильтра.

[Главная страница](#)

