П.1.1. Стандартные линейные формы и распределения корней характеристического полинома

Модальный метод синтеза линейных систем предполагает управление свободными составляющими движения, входящих в правую часть (1.2). Задавая определенное распределение корней характеристического полинома синтезируемой САУ на комплексной плоскости в зависимости от предъявляемых к ней требований, можно обеспечить желаемую (монотонную или колебательную) форму переходных процессов, а также заданное быстродействие. При этом классический модальный метод предполагает отсутствие конечных нулей передаточной функции, влияющих на форму процессов, например, при положительности всех коэффициентов числителя $\mathrm{G(p)}$ приводящих к увеличению перерегулирования [1.3].

Распределение собственных чисел преобразованной матрицы $\mathbf{A}-\mathbf{BK}$ (собственной матрицы замкнутой системы) на комплексной плоскости зависит от коэффициентов характеристического полинома

$$\mathrm{N(p)} = \mathrm{p}^n + A_{n-1}\Omega \mathrm{p}^{n-1} + \ldots + A_1\Omega^{n-1}\mathrm{p} + \Omega^n .$$

Структура САУ с обратными связями по координатам состояния позволяет задать среднегеометрический корень Ω, а также привести коэффициенты формы $A_{n-1},\ldots,A_1$ к нормированным значениям и тем самым обеспечить заранее известные прямые показатели качества переходных процессов. В настоящее время разработано несколько стандартных линейных форм, обеспечивающих желаемое распределение корней характеристического полинома на комплексной плоскости.

Если все корни характеристического полинома системы кратные и равны некоторому отрицательному действительному числу, переходная характеристика имеет монотонный (апериодический) характер. При этом характеристический полином можно преобразовать к произведению n двучленов первого порядка

$$\left(\mathrm{p}-\Omega\right)^n,$$

представляющему собой бином Ньютона. Такой полином получил название биномиальной стандартной линейной формы, в которой коэффициенты формы A_j для систем до пятого порядка включительно выбираются в соответствии с таблицей Т.1.1.

Таблица Т.1.1. Коэффициенты характеристического полинома при биномиальной стандартной линейной форме

порядок полинома n	Стандартные коэффициенты			
	A_4	A_3	A_2	A_1
2	—	—	—	2
3	—	—	3	3
4	—	4	6	4
5	5	10	10	5

Переходные характеристики САУ при биномиальном распределении корней изображены на рис.П.1.1, где номер кривой соответствует порядку характеристического полинома.

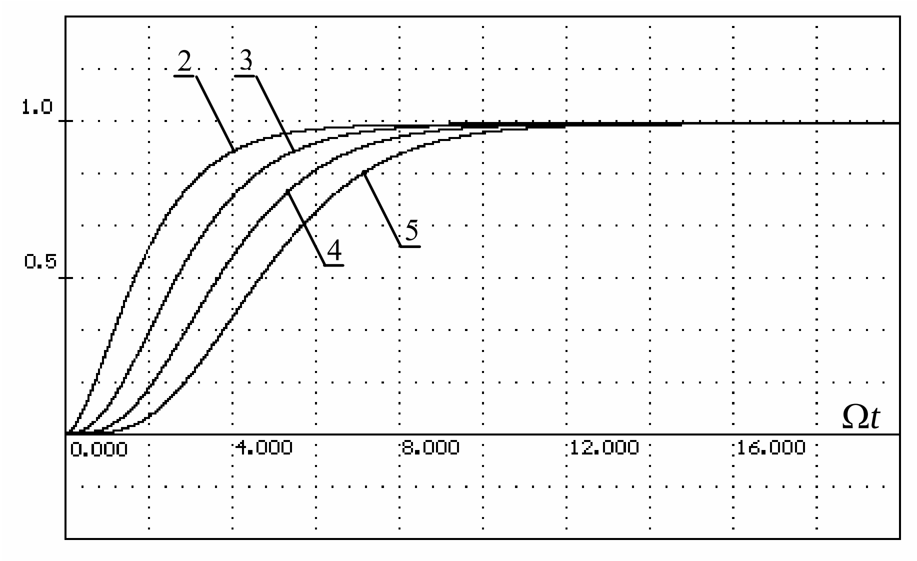

Рис.П.1.1. Переходные процессы в системе с биномиальным распределением корней

При биномиальной настройке реакция системы на входные воздействия является относительно медленной. Достичь более высокого быстродействия позволяют стандартные линейные формы распределения комплексно-сопряженных корней характеристического полинома (при нечетном значении n один из корней является вещественным). Один из вариантов выбора коэффициентов A_j такой формы, представленный в таблице Т.1.2, был предложен Баттервортом (S. Butterworth). Наличие мнимой составляющей в корнях D(p) приводит к возникновению перерегулирования, причем с увеличением порядка САУ колебательность растет, что иллюстрируется рис.П.1.2. Настройка замкнутой системы на желаемое распределение корней, соответствующее данной форме, позволяет приблизить ее показатели качества к характеристикам идеального фильтра, а также достичь относительного компромисса между быстродействием и колебательностью переходных процессов.

Таблица Т.1.2. Коэффициенты характеристического полинома при стандартной линейной форме Баттерворта

порядок полинома n	Стандартные коэффициенты			
	A_4	A_3	A_2	A_1
2	—	—	—	1,41
3	—	—	2	2
4	—	2,613	3,414	2,613
5	3,24	5,24	5,24	3,24

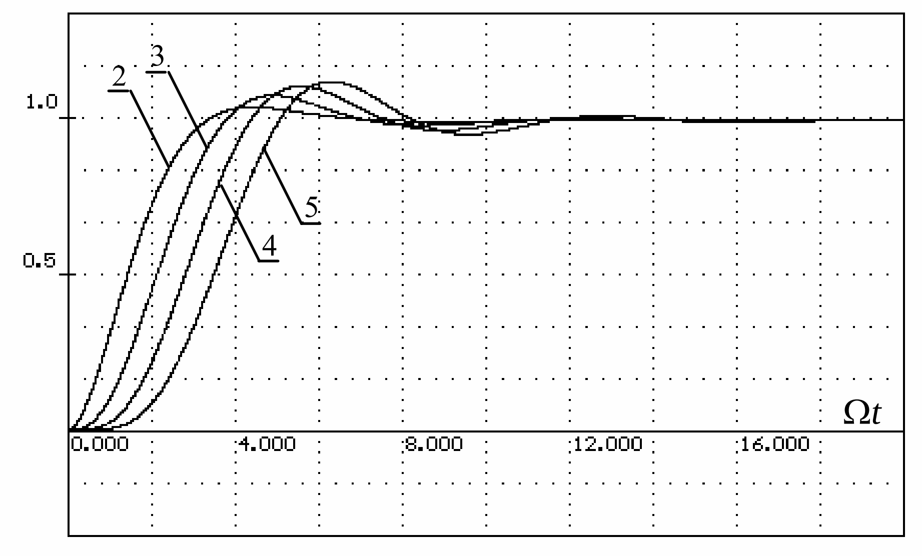

Рис.П.1.2. Переходные процессы в системе при настройке на стандартную форму Баттерворта

Близкие к стандартной линейной форме Баттерворта переходные процессы получаются при разложении характеристического полинома на произведения $n/2$ квадратных трехчленов (при нечетном n добавляется двучлен первой степени)

$$\mathrm{N(p)} = \left(\mathrm{p}^2 + 2\xi\Omega\mathrm{p} + \Omega^2\right)^k,$$

где $k = n/2$,
и выборе коэффициента демпфирования из условия

$$\xi = 0{,}75.$$

Значения нормированных коэффициентов формы представлены в таблице Т.1.3, а реакция системы на единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях – на рис.П.1.3.

Таблица Т.1.3. Коэффициенты характеристического полинома при стандартной линейной форме с $\xi = 0{,}75$

порядок полинома n	Стандартные коэффициенты			
	A_4	A_3	A_2	A_1
2	—	—	—	1,5
3	—	—	2,5	2,5
4	—	3	4,25	3
5	4	7,25	7,25	4

Как видно из таблиц Т.1.1 – Т.1.3, одной из особенностей рассмотренных выше стандартных линейных форм является симметричное распределение коэффициентов формы $A_{n-1},\ldots,A_1$, что объясняется особым расположением полюсов на левой полуплоскости [1.5].

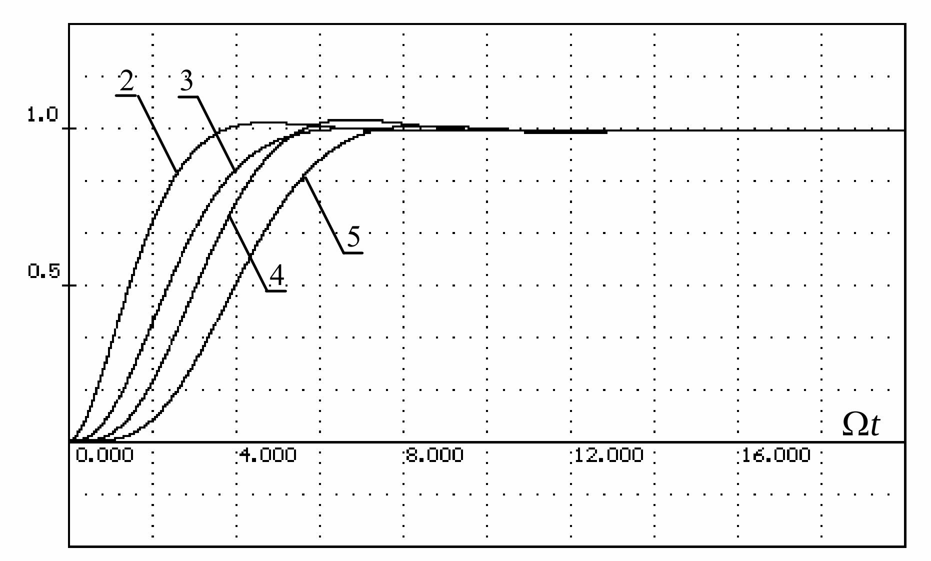

Рис.П.1.3. Переходные процессы в системе при стандартной линейной форме с $\xi = 0{,}75$

Распределение корней, соответствующее стандартной линейной форме Баттерворта, характеризуется достаточно большими колебаниями переходных характеристик, а при биномиальной форме – относительно медленным темпом процессов. Отмеченные недостатки позволяет избежать стандартная линейная форма Бесселя, нормированные коэффициенты формы которой приведены в таблице Т.1.4, а переходные процессы в замкнутой системе до пятого порядка включительно изображены на рис.П.1.4.

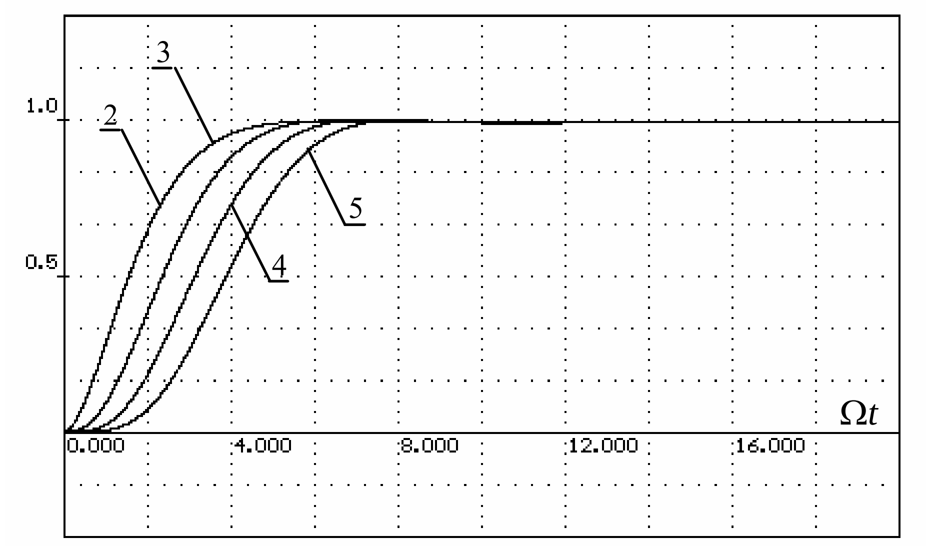

Рис.П.1.4. Переходные процессы в системе при настройке на стандартную форму Бесселя

Таблица Т.1.4. Коэффициенты характеристического полинома
при стандартной линейной форме Бесселя

порядок полинома n	Стандартные коэффициенты			
	A_4	A_3	A_2	A_1
2	—	—	—	1,73
3	—	—	2,43	2,47
4	—	3,12	4,39	3,2
5	3,81	6,78	6,89	3,94

Как видно из рис.П.1.4, реакция системы на единичное ступенчатое воздействие практически не имеет колебаний и при этом обеспечивается достаточно малое время регулирования.

Другим широко распространенным видом распределения корней характеристического полинома на комплексной плоскости является стандартная линейная форма Чебышева, коэффициенты A_j, $j=\overline{1,n}$ которой приведены в таблице Т.1.5, а реакции на единичной ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях изображены на рис.П.1.5.

Таблица Т.1.5. Коэффициенты характеристического полинома
при стандартной линейной форме Чебышева

порядок полинома n	Стандартные коэффициенты			
	A_4	A_3	A_2	A_1
2	—	—	—	1,16
3	—	—	1,4	1,92
4	—	1,53	2,79	2,12
5	3,81	6,78	6,89	3,94

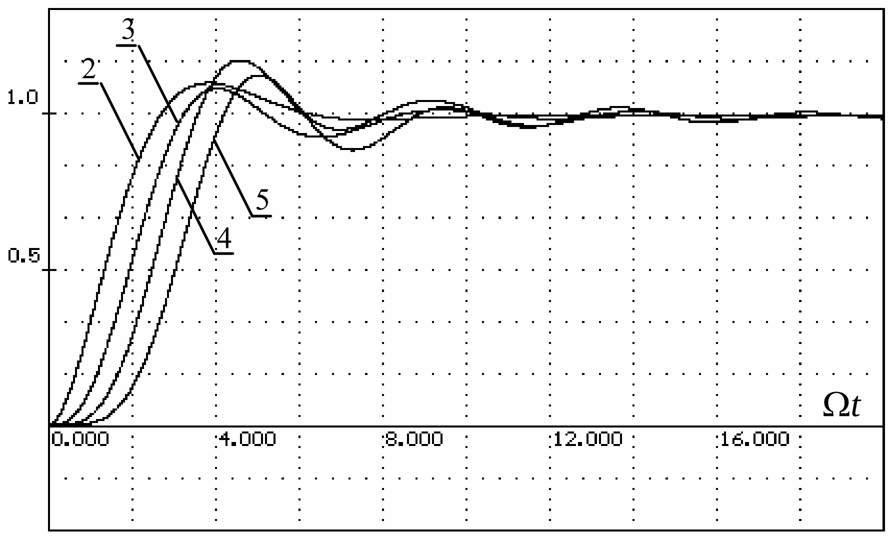

Рис.П.1.5. Переходные процессы в системе при настройке
на стандартную форму Чебышева

Достоинством стандартной линейной формы Чебышева является резкий спад амлитудно-частотной характеристики системы после частоты среза [1.8], что обусловливает широкое применение данной настройки при синтезе фильтров низких частот в различных устройствах автоматики.

Если принять некратное распределение комплексно-сопряженных корней с постоянной вещественной частью α, а мнимую составляющую задать в виде арифметической прогрессии с разностью γ, первый член которой также равен γ, то путем выбора оптимального соотношения $\alpha\gamma^{-1}$ можно добиться наименьшего времени регулирования в линейной системе n-ого порядка [1.3]. В таблице Т.1.6 приведены коэффициенты формы, а на рис.П.1.6 изображены переходные характеристики при данном виде настройки.

Таблица Т.1.6. Коэффициенты характеристического полинома при настройке, обеспечивающей наибольшее быстродействие

порядок полинома n	Стандартные коэффициенты			
	A_4	A_3	A_2	A_1
2	—	—	—	1,38
3	—	—	2,05	2,39
4	—	2,6	3,8	2,8
5	2,5	5,3	5,46	3,64

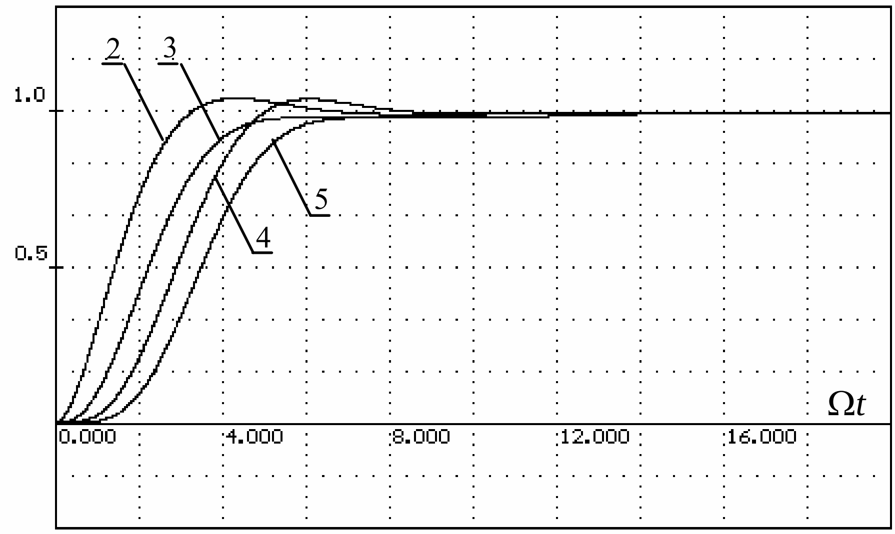

Рис.П.1.6. Переходные процессы в системе при оптимальной настройке на быстродействие

Помимо рассмотренных выше вариантов выбора нормированных коэффициентов A_j существуют и другие стандартные линейные формы, полученные в результате минимизации некоторых функционалов качества.

Если в системе требуется обеспечить минимум интеграла от квадрата ошибки регулирования

$$J = \int_0^\infty \left(x(\infty) - x(t)\right)^2 dt,$$

то стандартные коэффициенты формы принимают значения, представленные в таблице Т.1.7.

Таблица Т.1.7. Коэффициенты характеристического полинома при стандартной линейной форме, обеспечивающей минимум интеграла от квадрата ошибки

порядок полинома n	Стандартные коэффициенты			
	A_4	A_3	A_2	A_1
2	—	—	—	1
3	—	—	1	2
4	—	1	3	2
5	1	4	3	3

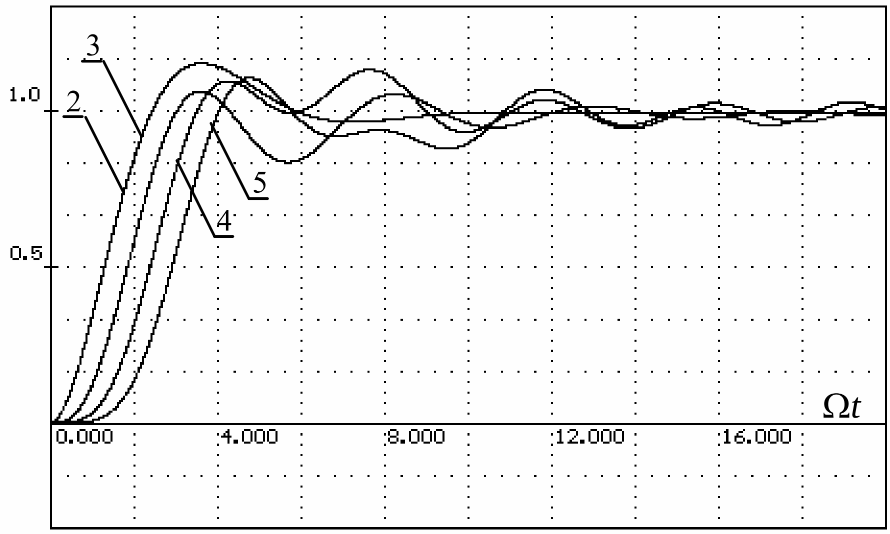

Рис.П.1.7. Переходные процессы в системе при настройке на стандартную линейную форму, обеспечивающую минимум интеграла от квадрата ошибки

Соблюдение требования минимума данного функционала, вне зависимости от знака ошибки и формы переходного процесса, позволяет приблизить реакцию системы на единичное ступенчатое воздействие к идеальной по быстродействию (рис.П.1.7).